

Cálculo de la potencia de salida por los puertos de un Beam Position Monitor (BPM)

Índice

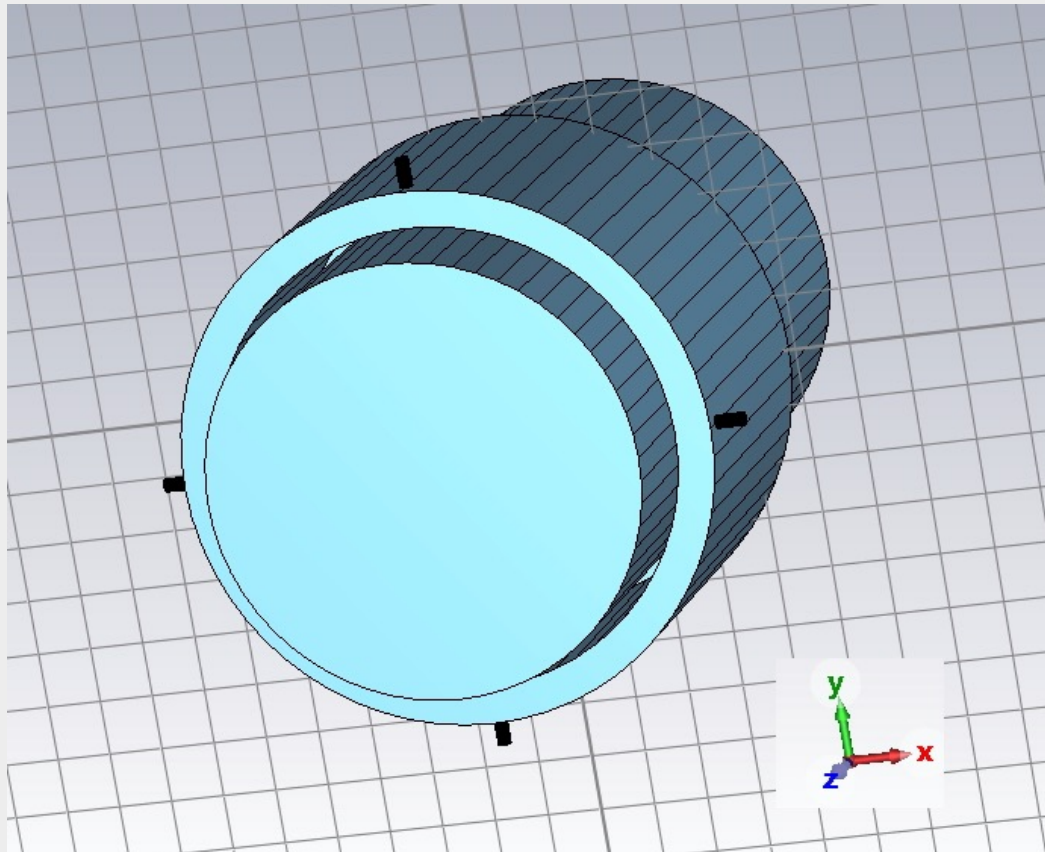
- Objetivos
- Descripción general del método BIR-ME
- Aplicación de BIR-ME para un haloscopio
- Fórmula teórica para la potencia de salida de un BPM
- Aplicación de BIR-ME para un BPM
- Conclusiones

Índice

- **Objetivos**
- Descripción general del método BIR-ME
- Aplicación de BIR-ME para un haloscopio
- Fórmula teórica para la potencia de salida de un BPM
- Aplicación de BIR-ME para un BPM
- Conclusiones

Objetivo

- El objetivo es obtener el voltaje y la potencia por los puertos de salida de un Beam Position Monitor (BPM) de tipo cavidad reentrante, mediante tres métodos diferentes: Boundary Integral Resonant Mode Expansion (BIR-ME), fórmula teórica, y simulaciones numéricas con CST Microwave Studio (CST MS)
- Haciendo esto, se pretende verificar la aplicabilidad BIR-ME para el estudio teórico del BPM, constituyendo una alternativa a las simulaciones Particle-in-Cell (PIC) con CST MS



Esquema en CST MS del BPM de Saclay

Índice

- Objetivos
- Descripción general del método BIR-ME
- Aplicación de BIR-ME para un haloscopio
- Fórmula teórica para la potencia de salida de un BPM
- Aplicación de BIR-ME para un BPM
- Conclusiones

Descripción general del método BIR-ME

- El método BIR-ME es una técnica modal avanzada de onda completa para el análisis electromagnético preciso y eficiente de guías de onda y cavidades de microondas de forma arbitraria que incluyan obstáculos metálicos y dieléctricos de geometría arbitraria
- Según BIR-ME, dada una cavidad de microondas con un número arbitrario de puertos P conectados a la misma, las corrientes equivalentes medidas en cada puerto, generadas por una fuente interna de corriente dentro de la cavidad, se expresan como

$$I_l^{(\mu)} = \sum_{v=1}^P \sum_{n=1}^{N_v} Y_{ln}^{(\mu,v)} V_n^{(v)} + \sum_{m=1}^M F_{ml}^{(\mu)} \frac{k_m}{k_m^2 - k^2} \int_V \vec{E}_m(\vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}') dV'$$

$$I_l^{(\mu)'} \equiv \sum_{v=1}^P \sum_{n=1}^{N_v} Y_{ln}^{(\mu,v)} V_n^{(v)}$$

$$\tilde{I}_l^{(\mu)} \equiv \sum_{m=1}^M F_{ml}^{(\mu)} \frac{k_m}{k_m^2 - k^2} \int_V \vec{E}_m(\vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}') dV'$$

$$F_{ml}^{(\mu)} \equiv \int_{S(\mu)} \vec{H}_m(\vec{r}) \cdot \vec{h}_l^{(\mu)}(\vec{r}) dS$$

$Y_{ln}^{(\mu,v)}$ es la matriz multimodal de admitancias generalizada
 μ, v representa el número del puerto
 l, n representan los modos del puerto
 m es el modo resonante de la cavidad

P es el número total de puertos

N_v es el número de modos considerados en el puerto v

$V_n^{(v)}$ es el voltaje equivalente del modo n en el puerto v

M es el número total de puertos considerados en la cavidad

k_m son los autovalores de la cavidad sin pérdidas

k es el vector de ondas

\vec{E}_m es el campo eléctrico del m -ésimo modo resonante de la cavidad (sin pérdidas)

\vec{J} es la densidad de corriente eléctrica que excita la cavidad

$\vec{h}_l^{(v)}$ es el campo eléctrico del l -ésimo modo del puerto μ

$S(\mu)$ es la superficie de intersección entre la cavidad y el puerto μ

Q_m es el factor de calidad del modo m -ésimo de la cavidad sin cargar

- Para considerar pérdidas

$$k_m \rightarrow \kappa_m, \quad \kappa_m = k_m \left(1 - \frac{1}{2Q_m}\right) + j \frac{k_m}{2Q_m}$$

Descripción general del método BIR-ME

- La cavidad resonante, junto con los puertos, puede describirse mediante un modelo circuital equivalente, que permite combinar los resultados de las corrientes equivalentes del método BIR-ME de la siguiente forma

$$I_l^{(\mu)} = \sum_{v=1}^P \sum_{n=1}^{N_v} Y_{ln}^{(\mu,v)} V_n^{(v)} + \sum_{m=1}^M F_{ml}^{(\mu)} \frac{k_m}{k_m^2 - k^2} \int_V \vec{E}_m(\vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}') dV'$$

$$I_l^{(\mu)'} \equiv \sum_{v=1}^P \sum_{n=1}^{N_v} Y_{ln}^{(\mu,v)} V_n^{(v)}$$

$$\tilde{I}_l^{(\mu)} \equiv \sum_{m=1}^M F_{ml}^{(\mu)} \frac{k_m}{k_m^2 - k^2} \int_V \vec{E}_m(\vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}') dV'$$

$$I_l^{(\mu)} = I_l^{(\mu)'} + \tilde{I}_l^{(\mu)}$$

- Definimos los sentidos de las corrientes en el circuito de manera que correspondan con la ecuación anterior de corrientes equivalentes obtenida por el método BIR-ME
- Aplicando las leyes de Kirchhoff a las mallas del circuito

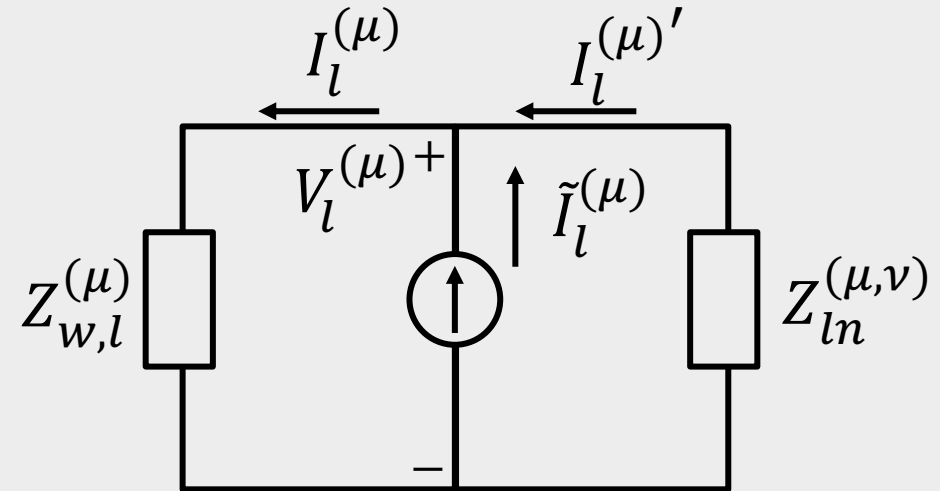
$$V_l^{(\mu)} - Z_{w,l}^{(\mu)} I_l^{(\mu)} = 0 \longrightarrow I_l^{(\mu)} = Y_{w,l}^{(\mu)} V_l^{(\mu)}$$

$$V_l^{(\mu)} + Z_{ln}^{(\mu,v)} I_l^{(\mu)'} = 0 \longrightarrow I_l^{(\mu)'} = -Y_{ln}^{(\mu,v)} V_l^{(\mu)}$$

$$Y_{w,l}^{(\mu)} V_l^{(\mu)} = -Y_{ln}^{(\mu,v)} V_l^{(\mu)} + \tilde{I}_l^{(\mu)}$$

$$\tilde{I}_l^{(\mu)} = (Y_{w,l}^{(\mu)} + Y_{ln}^{(\mu,v)}) V_l^{(\mu)}$$

$$V_l^{(\mu)} = (Y_{w,l}^{(\mu)} + Y_{ln}^{(\mu,v)})^{-1} \tilde{I}_l^{(\mu)}$$



Modelo circuital equivalente de la cavidad resonante

$Z_{ln}^{(\mu,v)}$ es la matriz multimodal de impedancias generalizada
 $Z_{w,l}^{(\mu)}$ es la impedancia modal del modo I de la guía del puerto μ

Descripción general del método BIR-ME

- Los modos que deben usarse en el método BIR-ME requieren la siguiente normalización

$$\int_V \vec{E}_m \cdot \vec{E}_n dV = \delta_{mn} \quad \int_V \vec{H}_m \cdot \vec{H}_n dV = \delta_{mn}$$

- Sin embargo, en CST MS los campos de los modos están normalizados de manera que la energía total almacenada en el campo electromagnético, U , es de 1 J, es decir

$$U = U_e + U_m = 1 \text{ J} \quad U_e = U_m \longrightarrow U_e = U_m = 0.5 \text{ J}$$

U_e energía almacenada por el campo eléctrico
 U_m energía almacenada por el campo magnético

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{4} \int_V |\vec{E}|^2 dV \quad U_m = \frac{\mu_0}{4} \int_V |\vec{H}|^2 dV$$

- Podemos obtener los factores α y β para la renormalización de los campos de CST MS, para que puedan ser usados en BIR-ME, de la siguiente manera

$$\vec{E}_{BIR-ME} = \alpha \vec{E}_{CST} \quad \vec{H}_{BIR-ME} = \beta \vec{H}_{CST}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\epsilon_0}{4} \int_V |\vec{E}_{CST}|^2 dV \longrightarrow \frac{2}{\epsilon_0} = \int_V |\vec{E}_{CST}|^2 dV = \frac{1}{\alpha^2} \int_V |\vec{E}_{BIR-ME}|^2 dV = \frac{1}{\alpha^2} \longrightarrow \alpha^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \longrightarrow \alpha = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\mu_0}{4} \int_V |\vec{H}_{CST}|^2 dV \longrightarrow \frac{2}{\mu_0} = \int_V |\vec{H}_{CST}|^2 dV = \frac{1}{\beta^2} \int_V |\vec{H}_{BIR-ME}|^2 dV = \frac{1}{\beta^2} \longrightarrow \beta^2 = \frac{\mu_0}{2} \longrightarrow \beta = \sqrt{\frac{\mu_0}{2}}$$

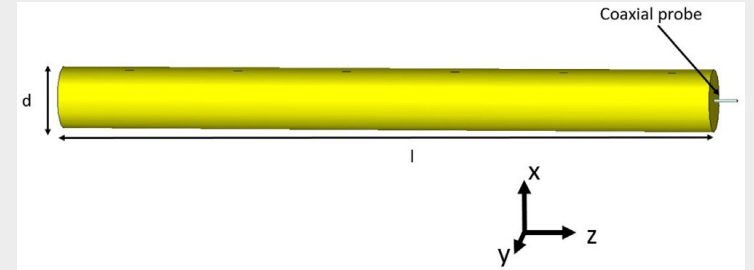
Índice

- Objetivos
- Descripción general del método BIR-ME
- **Aplicación de BIR-ME para un haloscopio**
- Fórmula teórica para la potencia de salida de un BPM
- Aplicación de BIR-ME para un BPM
- Conclusiones

Aplicación de BIR-ME para un haloscopio

- El objetivo de este apartado es aplicar el método BIR-ME para un haloscopio, consistente en una cavidad cilíndrica acoplada por una guía coaxial, que se usa para detectar materia oscura
- Esta estructura, de geometría sencilla y con un solo puerto, es ideal para verificar la correcta implementación del BIR-ME, ya que se disponen de resultados teóricos publicados en [1] para comparar con nuestros propios cálculos

Longitud de la cavidad, $l = 1000$ mm
 Diámetro cavidad, $d = 90$ mm
 Conductividad eléctrica, $\sigma = 6 \times 10^7$ S/m
 radio conductor externo coaxial, $b = 2.11$ mm
 radio conductor interno coaxial, $a = 0.635$ mm
 Conductividad dieléctrico coaxial, $\epsilon_r = 2.08$
 Campo magnético, $B_e = 8$ T
 $g_{a\gamma\gamma} a_0 = -8.51 \times 10^{-22}$



Esquema de la cavidad cilíndrica acoplada por un coaxial

- Solo hay un puerto ($P=1$) en el que solo consideramos el modo TEM fundamental $N_1=1$
- Solo consideramos el primer modo la cavidad (TM_{010}), $M=1$

$$I_l^{(\mu)} = I_l^{(\mu)'} + \tilde{I}_l^{(\mu)} \longrightarrow I_w = I_c + I_a$$

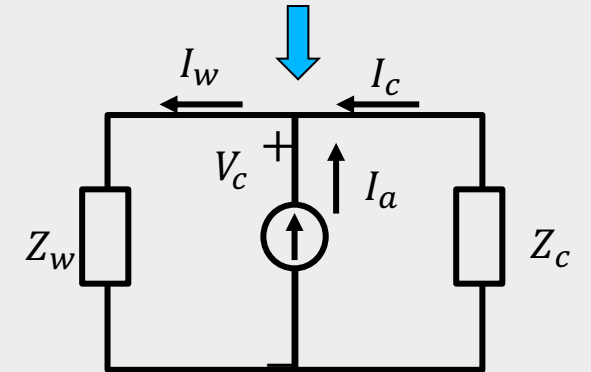
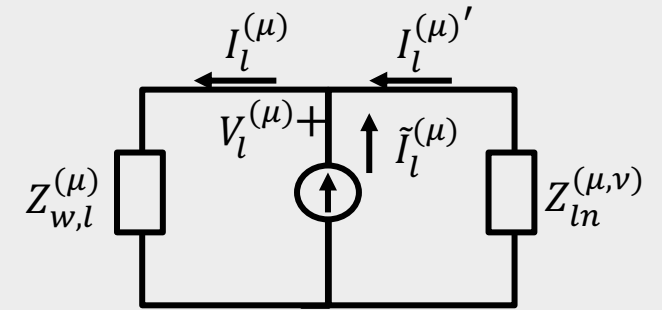
$$V_l^{(\mu)} = \left(Y_{w,l}^{(\mu)} + Y_{ln}^{(\mu,\nu)} \right)^{-1} \tilde{I}_l^{(\mu)} \longrightarrow V_c = \frac{I_a}{Y_w + Y_c}$$

$$I_a = -\frac{1}{\mu_0} g_{a\gamma\gamma} a_0 B_e j k \sum_{m=1}^M \frac{k_m}{k_m^2 - k^2} \left(\int_{S(\mu)} \vec{H}_m(\vec{r}) \cdot \vec{h}_{TEM}(\vec{r}) dS \right) \left(\int_V \vec{E}_m(\vec{r}) \cdot \hat{z} dV \right) \quad Z_w \equiv Z_{w,1}^{(1)}$$

$$\text{Potencia de salida por el puerto coaxial} \longrightarrow P_w = \frac{1}{2} \text{Re}(V_c I_w^*) = \frac{|V_c|^2}{2} \text{Re}(Y_w^*)$$

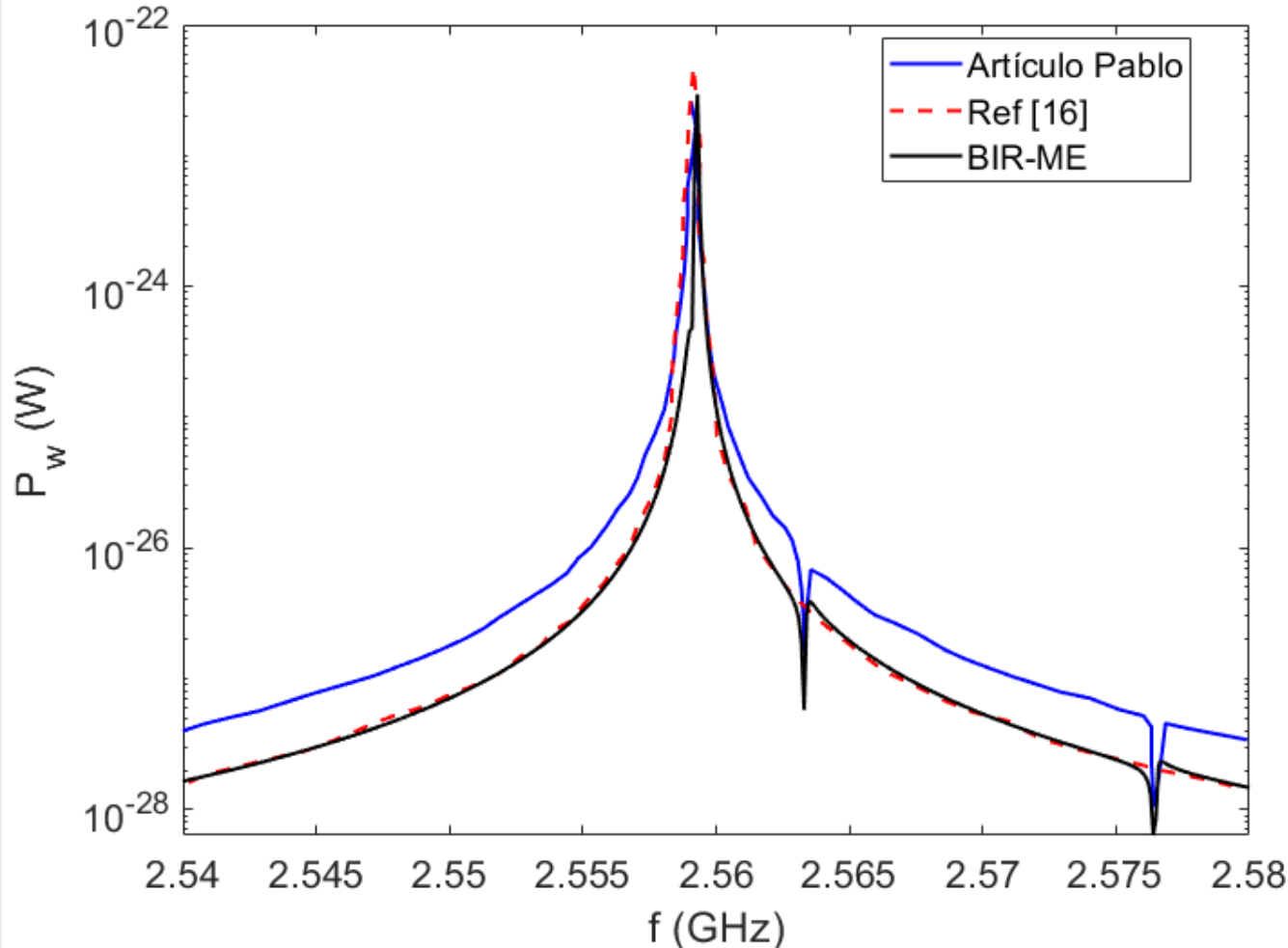
$$\begin{aligned}
 I_w &\equiv I_1^{(1)} \\
 I_c &\equiv I_1^{(1)'} \\
 I_a &\equiv \tilde{I}_1^{(1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_c &\equiv V_1^{(1)} \\
 Z_c &\equiv Z_{11}^{(1,1)}
 \end{aligned}$$



Aplicación de BIR-ME para un haloscopio

- Tras aplicar BIR-ME se obtienen los siguiente resultados en términos de la potencia de salida por el puerto acoplado a la guía coaxial. Se incluyen además los resultados de la Fig. 8 de [1] (artículo Pablo), de la Ref [16] de [1]



Potencia extraída de la cavidad excitada por los axiones a través del puerto coaxial en función de la frecuencia

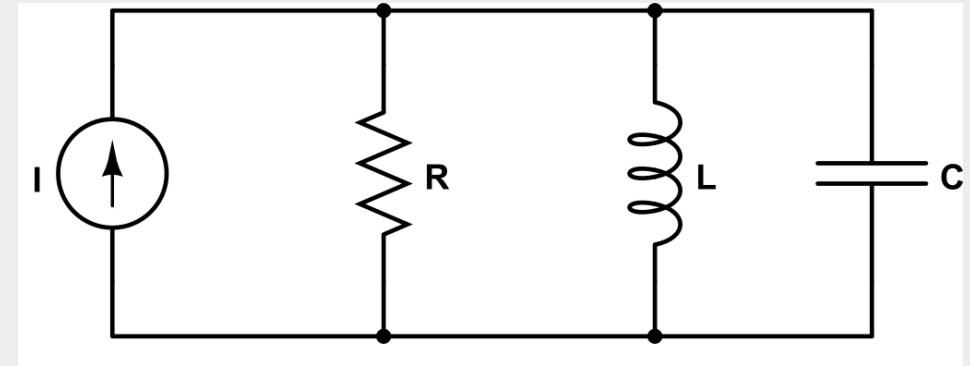
- En los resultados de BIR-ME, ha sido necesario añadir un offset a la frecuencia para hacer coincidir la resonancia con el resto de resultados
- Esta pequeña diferencia entre ambos resultados es debido a que la frecuencia resonante proporcionada por CST MS no coincide con las de los otros datos. La causa de esto es la falta de precisión en los cálculos de CST MS con los recursos computacionales disponibles (no es un problema de BIR-ME)
- Teniendo en cuenta esta salvedad, que solo afecta a la posición de la resonancia, se constata el excelente acuerdo, tanto con los resultados de la Ref [16] como con los del art. de Pablo

Índice

- Objetivos
- Descripción general del método BIR-ME
- Aplicación de BIR-ME para un haloscopio
- **Fórmula teórica para la potencia de salida de un BPM**
- Aplicación de BIR-ME para un BPM
- Conclusiones

Fórmula teórica para la potencia de salida de un BPM

- La fórmula teórica para el voltaje y la potencia de salida a través de los puertos de un BPM se puede obtener usando una modelización circuital de la cavidad resonante de microondas
- La corriente que excita el circuito representa la corriente del haz de electrones que excita los modos de la cavidad
- La resistencia representa tanto las pérdidas óhmicas como la energía que sale por los puertos acoplados a la cavidad



Modelo circuital equivalente para una cavidad resonante de microondas

$$I = I_C + I_R + I_L$$

$$I = C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} + \frac{1}{L} \int V dt \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{C} \frac{dI}{dt} = \frac{d^2V}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{LC} V \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2V}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_L} \frac{dV}{dt} + \omega_0^2 V = \frac{1}{C} \frac{dI}{dt}$$

$$Q_L = \frac{\omega_0 U}{P} \quad U = \frac{1}{2} C V_0^2 + \frac{1}{2} L I_0^2 \quad U = C V_0^2 \quad P = \frac{V_0^2}{R}$$

$$Q_L = \frac{\omega_0 U}{P} = \frac{\omega_0 C V_0^2}{\frac{V_0^2}{R}} = \omega_0 C R \quad \frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{Q_L} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Q_L es el factor de calidad de la cavidad cargada
 C es la capacidad
 L es la autoinductancia
 R es la resistencia (representa pérdidas óhmicas más energía extraída por los puertos)
 P es la potencia total disipada en el circuito (pérdidas óhmicas más potencia extraída por los puertos)
 ω_0 es la frecuencia de resonancia
 V_0 e I_0 son las amplitudes del voltaje y corriente, respectivamente
 U es la energía electromagnética total almacenada en la cavidad

- Para resolver la ecuación diferencial del circuito usaremos el truco de pasar al espacio de Fourier

Fórmula teórica para la potencia de salida de un BPM

- Usaremos la definición de transformada de Fourier y se lo aplicamos a la ecuación diferencial

$$V(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{V}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \frac{dV}{dt} = j\omega \tilde{V}(\omega) \quad \frac{d^2V}{dt^2} = -\omega^2 \tilde{V}(\omega)$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_L} \frac{dV}{dt} + \omega_0^2 V = \frac{1}{C} \frac{dI}{dt} \longrightarrow -\omega^2 \tilde{V}(\omega) + \frac{\omega_0}{Q_L} j\omega \tilde{V}(\omega) + \omega_0^2 \tilde{V}(\omega) = \frac{j\omega}{C} \tilde{I}(\omega) \longrightarrow \tilde{V}(\omega) = \frac{j\omega \tilde{I}(\omega)}{C} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q_L}}$$

- La ecuación diferencial se ha transformado en una ecuación algebraica en el espacio de Fourier
- Ahora tenemos que calcular la transformada de la corriente del circuito, que supondremos que en el dominio temporal es de tipo gaussiano, en consonancia con la distribución del haz de electrones que usaremos posteriormente en BIR-ME

$$I(t) = \frac{qv}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-t_0)^2 v^2}{2\sigma^2}}$$

v es la velocidad de propagación de la corriente
 σ es la anchura temporal del haz
 t_0 es el tiempo en el que la corriente del haz es máxima

$$\tilde{I}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{qv}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(vt-vt_0)^2}{2\sigma^2}} e^{-j\omega t} dt \longrightarrow \tilde{I}(\omega) = q e^{-j\omega_0 t} e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2v^2}}$$

Resultado conocido $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(vt-vt_0)^2}{2\sigma^2}} e^{-j\omega t} dt = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{v} e^{-j\omega_0 t} e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2v^2}} \quad vt_0 \leftrightarrow z$

- Llegamos finalmente a $\tilde{V}(\omega) = \frac{jq}{C} \frac{\omega e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2v^2}} e^{-j\omega t_0}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q_L}}$ cuya transformada inversa nos proporciona $V(t)$

Fórmula teórica para la potencia de salida de un BPM

- En primer lugar, nos damos cuenta de que podemos usar la siguiente propiedad de las transformadas de Fourier

$$\tilde{V}(\omega) = \frac{jq}{C} \frac{\omega e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2v^2}} e^{-j\omega t_0}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q_L}} \quad \mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = F(\omega) e^{-j\omega t_0} \quad F(\omega) = \frac{\omega e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2v^2}}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q_L}}$$

- Aun así, obtener la transformada inversa de $F(\omega)$ presenta una significativa complejidad. Sin embargo, podemos hacer una aproximación razonable que nos permite simplificar este cálculo

Cerca de la resonancia $\omega \approx \omega_0$ $\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q_L} = (\omega + \omega_0)(\omega_0 - \omega) + j \frac{\omega_0 \omega}{Q_L} \approx 2\omega_0 (\omega_0 - \omega) + j \frac{\omega_0 \omega}{Q_L} = 2\omega_0 \left[\omega_0 - \omega + j \frac{\omega_0}{2Q_L} \right]$

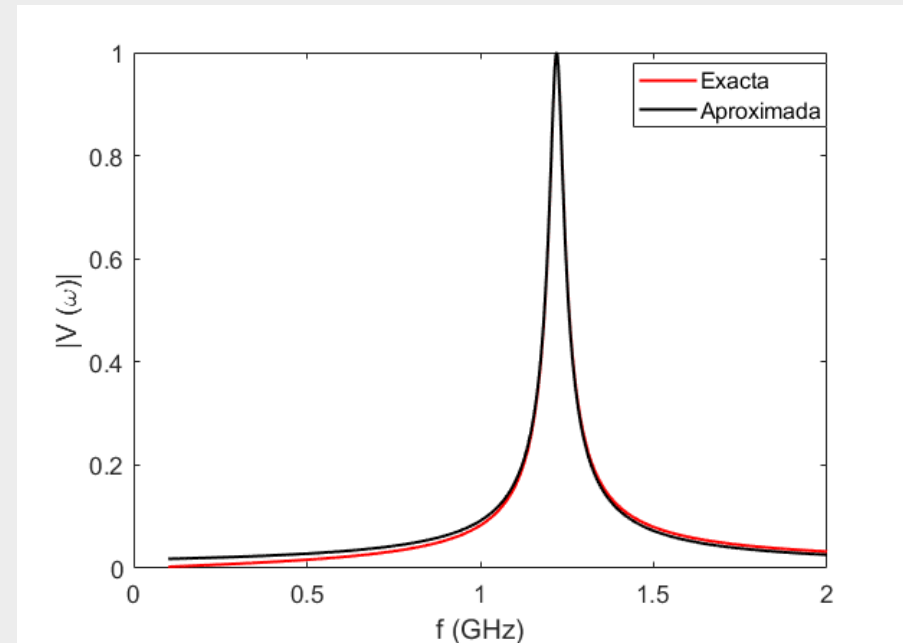
$$F(\omega) \approx \frac{\omega_0 e^{-\frac{\sigma^2 \omega_0^2}{2v^2}}}{2\omega_0 \left[\omega_0 - \omega + j \frac{\omega_0}{2Q_L} \right]} = \frac{j e^{-\frac{\sigma^2 \omega_0^2}{2v^2}}}{2} \frac{1}{j\omega_0 - j\omega - \frac{\omega_0}{2Q_L}}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{j\omega_0 - j\omega - \frac{\omega_0}{2Q_L}} \right\} &= -\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{j\omega - j\omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q_L}} \right\} \\ &= -\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{\omega_0 \left(\frac{1}{2Q_L} - j \right) + j\omega} \right\} = -e^{-\frac{\omega_0}{2Q_L} t} e^{j\omega_0 t} u(t) \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{a + j\omega} \right\} = e^{-at} u(t) \quad \text{Re}(a) > 0 \quad u(t) \text{ es la función escalón}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = -\frac{j}{2} e^{-\frac{\sigma^2 \omega_0^2}{2v^2}} e^{-\frac{\omega_0}{2Q_L} t} e^{j\omega_0 t} u(t)$$

$$V(t) = \frac{q}{2C} e^{-\frac{\sigma^2 \omega_0^2}{2v^2}} e^{-\frac{\omega_0}{2Q_L} (t-t_0)} e^{j\omega_0 (t-t_0)} u(t - t_0)$$



Comparación entre el voltaje espectral normalizado, con la fórmula exacta y con la aproximación

Fórmula teórica para la potencia de salida de un BPM

- Hasta aquí hemos obtenido el voltaje en la cavidad, ahora debemos relacionarlo con el voltaje en la guía del puerto de salida, V_g

$$\text{Voltaje en la cavidad} \longrightarrow V(t) = \frac{q}{2C} e^{-\frac{\sigma^2 \omega_0^2}{2v^2} t} e^{-\frac{\omega_0}{2Q_L}(t-t_0)} e^{j\omega_0(t-t_0)} u(t-t_0)$$

$$\left(\frac{R}{Q}\right) = \frac{V_0^2}{\omega_0 U} = \frac{V_0^2}{\omega_0 C V_0^2} \longrightarrow \omega_0 \left(\frac{R}{Q}\right) = \frac{1}{C} \quad P_{ext} = \frac{V_g^2}{Z}$$

$$Q_{ext} = \frac{\omega_0 U}{P_{ext}} = \frac{\omega_0 C V_0^2}{\frac{V_g^2}{Z}} = \frac{Z \omega_0 V_0^2}{V_g^2 \omega_0 \left(\frac{R}{Q}\right)} \longrightarrow V_g = \sqrt{\frac{Z}{\left(\frac{R}{Q}\right) Q_{ext}}} V_0$$

$$V_0 = \frac{q}{2C} e^{-\frac{\sigma^2 \omega_0^2}{2v^2} t} = \frac{q}{2} \omega_0 \left(\frac{R}{Q}\right) e^{-\frac{\sigma^2 \omega_0^2}{2v^2} t} \longrightarrow V_g = \sqrt{\frac{Z}{\left(\frac{R}{Q}\right) Q_{ext}}} \frac{q}{2} \omega_0 \left(\frac{R}{Q}\right) e^{-\frac{\sigma^2 \omega_0^2}{2v^2} t} = \frac{q \omega_0}{2} \sqrt{\frac{Z}{Q_{ext}}} \left(\frac{R}{Q}\right) e^{-\frac{\sigma^2 \omega_0^2}{2v^2} t}$$

$$\text{Voltaje en la guía de salida} \longrightarrow V_g(t) = \frac{q \omega_0}{2} \sqrt{\frac{Z}{Q_{ext}}} \left(\frac{R}{Q}\right) e^{-\frac{\sigma^2 \omega_0^2}{2v^2} t} e^{-\frac{\omega_0}{2Q_L}(t-t_0)} e^{j\omega_0(t-t_0)} u(t-t_0)$$

Z es la impedancia de la guía del puerto
 Q_{ext} es el factor de calidad externo
 P_{ext} es la potencia de salida por el puerto
 V_g es el voltaje en la guía de salida

Fórmula teórica para la potencia de salida de un BPM

- La fórmula teórica para el voltaje de salida a través de los puertos de un BPM dada [2] (se asume un haz gaussiano desplazado una distancia x_0 del eje axial), es consistente con la que acabamos de deducir, teniendo en cuenta que $v = c$ y $\omega_0 = \omega_m$

$$V(t) = V_{out} e^{-\frac{t}{2\tau}} e^{j\omega_m t} u(t) \quad \tau = \frac{Q_L}{\omega_m}$$

$$V_{out} = \frac{\omega_m}{2} \sqrt{\frac{Z}{Q_{ext}} \left(\frac{R}{Q}\right)_0} e^{-\frac{\omega_m^2 \sigma_z^2}{2c^2}} q \frac{x}{x_0}$$

$$P_{out} = \frac{\omega_m^2}{4Q_{ext}} \left(\frac{R}{Q}\right)_0 e^{-\frac{\omega_m^2 \sigma_z^2}{c^2}} q^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2$$

σ_z es la longitud axial del haz

ω_m es la frecuencia angular del modo

q es la carga del haz

Q_{ext} es el factor de calidad externo de la cavidad

Q_L es el factor de calidad de la cavidad cargada

c es la velocidad de la luz en el vacío

x es el desplazamiento del haz respecto al eje

$(R/Q)_0$ es la shunt impedance normalizada medida en x_0

$u(t)$ es la función escalón

Z es la impedancia característica de la guía del puerto

τ es el tiempo de decaimiento

Nota: para el modo monopolar, el término $\frac{x^2}{x_0^2}$ no aparece

- Los resultados de BIR-ME y las simulaciones PIC de CST MS vienen dadas en el espectro frecuencial. Por tanto, conviene expresar las fórmulas anteriores para voltaje y potencia en el dominio de la frecuencia, haciendo para ello la transformada de Fourier

Definición de transformada de Fourier $\longrightarrow F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$

$$\tilde{V}(\omega) = V_{out} \mathcal{F}\left\{e^{-\frac{t}{2\tau}} e^{j\omega_m t} u(t)\right\}$$

Usamos las propiedades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} f(t)\} = F(\omega - \omega_0) \\ \mathcal{F}\left\{e^{-\frac{t}{2\tau}} u(t)\right\} = \frac{1}{j\omega + \frac{1}{2\tau}} = \frac{2\tau}{1 + j2\tau\omega} \end{array} \right.$$

$$\tilde{V}(\omega) = \frac{2V_{out}\tau}{1 + j2\tau(\omega - \omega_m)} = \frac{2V_{out}\tau[1 - j2\tau(\omega - \omega_m)]}{1 + 4\tau^2(\omega - \omega_m)^2}$$

Fórmula teórica para la potencia de salida de un BPM

- La potencia de salida por los puertos del BPM se relaciona con el voltaje a través de la siguiente expresión

$$P(t) = \frac{|V(t)|^2}{Z}$$

- La identidad de Parseval nos da la siguiente relación entre el voltaje y su transformada

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |V(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{V}(\omega)|^2 d\omega$$

- Si multiplicamos a ambos lados de la igualdad anterior por un factor $1/Z$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|V(t)|^2}{Z} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{V}(\omega)|^2}{Z} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{P}(\omega) d\omega$$

$$\tilde{P}(\omega) = \frac{|\tilde{V}(\omega)|^2}{2\pi Z}$$

- Sustituyendo el valor de $\tilde{V}(\omega)$ obtenido anteriormente llegamos a

$$\tilde{P}(\omega) = \frac{2\tau^2 V_{out}^2}{2\pi Z [1 + 4\tau^2 (\omega - \omega_m)^2]}$$

$$\tilde{P}(\omega) = \frac{2\tau^2 P_{out}}{\pi [1 + 4\tau^2 (\omega - \omega_m)^2]}$$

Índice

- Objetivos
- Descripción general del método BIR-ME
- Aplicación de BIR-ME para un haloscopio
- Fórmula teórica para la potencia de salida de un BPM
- **Aplicación de BIR-ME para un BPM**
- Conclusiones

Aplicación de BIR-ME para un BPM

Cálculo de J_{EJ}

$$J_{EJ} = \int_V \vec{E}_m(\vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}') dV'$$

- Para calcular J_{EJ} necesitamos conocer el campo eléctrico de los modos resonantes de la cavidad, cerrada y sin pérdidas, \vec{E}_m , y la densidad de corriente \vec{J} (en el dominio de la frecuencia) asociada al haz de electrones
- El campo eléctrico \vec{E}_m se obtiene en CST MS haciendo una simulación de tipo *Eigenmode*
- El cálculo de la corriente \vec{J} se detalla a continuación

Sea un haz de electrones con carga q , siguiendo una distribución gaussiana en la dirección axial, con un desplazamiento (x_0, y_0) respecto del eje del BPM, desplazándose a lo largo de la dirección axial con una velocidad v . La densidad de corriente del haz en el dominio del tiempo, $\vec{J}(\vec{r}, t)$, viene dada por

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v} \quad \longrightarrow \quad \vec{J}(\vec{r}, t) = \frac{qv}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-vt)^2}{2\sigma^2}} \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \hat{z}$$

$$\vec{J}(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{J}(\vec{r}, t) e^{-j\omega t} dt = \hat{z} \frac{qv}{\sigma\sqrt{2\pi}} \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z-vt)^2}{2\sigma^2}} e^{-j\omega t} dt$$

Haciendo el cambio de variable $u = z - vt$ $du = -v dt$ $t = \frac{u - z}{v}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z-vt)^2}{2\sigma^2}} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} e^{-j\frac{(u-z)}{v}\omega} du = -\frac{1}{v} e^{-\frac{j\omega z}{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2} + j\frac{\omega}{v}u\right)} du$$

El término de la exponencial se puede reescribir como $-\frac{u^2}{2\sigma^2} + j\frac{\omega}{v}u = -\frac{1}{2\sigma^2} \left(u^2 - j\frac{2\sigma^2\omega}{v}u \right)$

Aplicación de BIR-ME para un BPM

Cálculo de J_{EJ}

$$-\frac{u^2}{2\sigma^2} + j\frac{\omega}{v}u = -\frac{1}{2\sigma^2}\left(u^2 - j\frac{2\sigma^2\omega}{v}u\right) \quad \left(u - j\frac{\sigma^2\omega}{v}\right)^2 = u^2 - \frac{\sigma^4\omega^2}{v^2} - j\frac{2\sigma^2\omega}{v}u$$

$$u^2 - j\frac{2\sigma^2\omega}{v}u = \left(u - j\frac{\sigma^2\omega}{v}\right)^2 + \frac{\sigma^4\omega^2}{v^2} \quad -\frac{u^2}{2\sigma^2} + j\frac{\omega}{v}u = -\frac{1}{2\sigma^2}\left(u - j\frac{\sigma^2\omega}{v}\right)^2 - \frac{\sigma^2\omega^2}{2v^2}$$

$$\frac{1}{v}e^{-\frac{j\omega z}{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2} + j\frac{\omega}{v}u\right)} du = \frac{1}{v}e^{-\frac{j\omega z}{v}} e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2v^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\left(u - j\frac{\sigma^2\omega}{v}\right)^2}{2\sigma^2}} du$$

Haciendo un nuevo cambio de variable $u' = u - j\frac{\sigma^2\omega}{v}$ $du' = du$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\left(u - j\frac{\sigma^2\omega}{v}\right)^2}{2\sigma^2}} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u'^2}{2\sigma^2}} du' = \sigma\sqrt{2\pi}$$

Finalmente, la densidad de corriente queda como $\vec{J}(\vec{r}, \omega) = q\delta(x - x_0) \delta(y - y_0) e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2v^2}} e^{-\frac{j\omega z}{v}} \hat{z}$

$$J_{EJ} = \int_V \vec{E}_m(\vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}', \omega) dV' = qe^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2v^2}} \int_V E_{m,z}(x', y', z') \delta(x' - x_0) \delta(y' - y_0) e^{-\frac{j\omega z'}{v}} dx' dy' dz'$$

$$J_{EJ} = qe^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2v^2}} \int E_{m,z}(x_0, y_0, z') e^{-\frac{j\omega z'}{v}} dz'$$

La integral de volumen se transforma en una integral de línea a lo largo de la trayectoria del haz

Aplicación de BIR-ME para un BPM

Cálculo de J_μ

$$J_\mu = \int_{S(\mu)} \vec{H}_m(\vec{r}) \cdot \vec{h}_l^{(\mu)}(\vec{r}) dS$$

- Para calcular J_μ necesitamos conocer el campo magnético de los modos resonantes de la cavidad en las superficies de acoplo entre la cavidad y los puertos de salida, y el campo magnético de los modos de la guía en los puertos (en nuestro caso, guías coaxiales y solo consideramos el modo fundamental TEM)
- Tenemos cuatro puertos, distribuidos según las direcciones +y, +x, -y, -x
- En primer lugar, hay que describir la geometría de la superficie de contacto entre el coaxial y la pared del BPM

Geometría de la superficie de acoplo del puerto +y

Superficie de la cavidad reentrante $\longrightarrow x^2 + y^2 = R^2$

Superficie de la guía coaxial de acoplo $\longrightarrow x^2 + z^2 \leq r^2$

Parametrización de la superficie cavidad reentrante \longrightarrow

$$\begin{aligned} x &= R \cos \theta \\ y &= R \sin \theta \end{aligned}$$

Combinando las dos condiciones obtenemos la superficie de acoplo \longrightarrow

$$R^2 \cos^2 \theta + z^2 \leq r^2$$

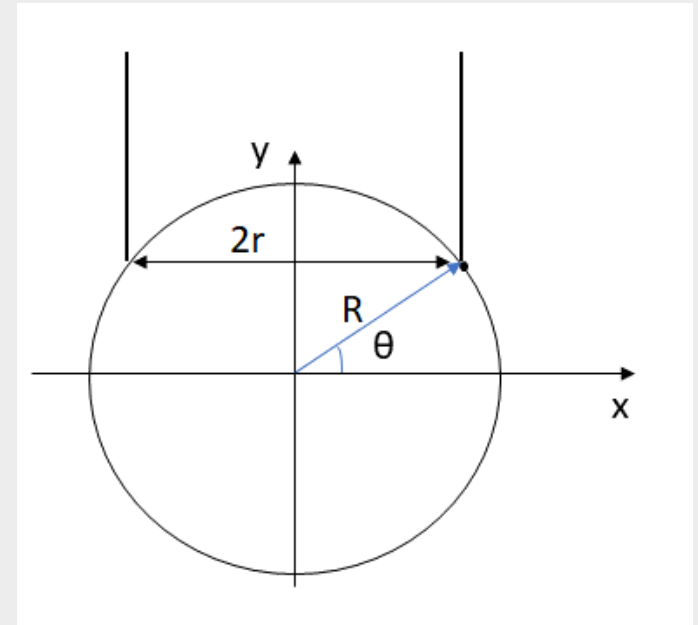
$$z^2 \leq r^2 - R^2 \cos^2 \theta \longrightarrow -\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \theta} \leq z \leq \sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \theta}$$

$$r^2 - R^2 \cos^2 \theta \geq 0 \longrightarrow r^2 \geq R^2 \cos^2 \theta \longrightarrow |\cos \theta| \leq \frac{r}{R}$$

$$\theta \in \left[\arccos\left(\frac{r}{R}\right), \pi - \arccos\left(\frac{r}{R}\right) \right]$$

R radio exterior cavidad reentrante (r_3)

r radio del conductor externo del acoplador coaxial (b)



Esquema del acoplo entre el BPM y el coaxial en el puerto +y (se muestra solo el conductor externo del coaxial)

Aplicación de BIR-ME para un BPM

Cálculo de J_μ

$$-\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \theta} \leq z \leq \sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \theta} \quad \longrightarrow \quad \text{Se puede parametrizar como} \quad z = s\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \theta} \quad s \in [-1,1]$$

Recopilando, la superficie de acoplo viene dada por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x(\theta, s) &= R \cos \theta & \theta &\in \left[\arccos\left(\frac{r}{R}\right), \pi - \arccos\left(\frac{r}{R}\right) \right] \\ y(\theta, s) &= R \sin \theta \\ z(\theta, s) &= s\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \theta} & s &\in [-1,1] \end{aligned}$$

Para hacer la integral J_μ es necesario conocer el elemento diferencial de superficie, que se puede obtener a partir de

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right| d\theta ds \quad \longrightarrow \quad dS = R\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \theta} d\theta ds$$

Geometría de la superficie de acoplo del puerto -y

Para obtener la parametrización de la geometría de acoplo al puerto -y simplemente debemos hacer el cambio de $y \rightarrow -y$

$$\begin{aligned} x(\theta, s) &= R \cos \theta & \theta &\in \left[\arccos\left(\frac{r}{R}\right), \pi - \arccos\left(\frac{r}{R}\right) \right] & dS &= R\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \theta} d\theta ds \\ y(\theta, s) &= -R \sin \theta \\ z(\theta, s) &= s\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \theta} & s &\in [-1,1] \end{aligned}$$

Aplicación de BIR-ME para un BPM

Cálculo de J_μ

Geometría de la superficie de acoplo del puerto +x

Superficie de la cavidad reentrante $\longrightarrow x^2 + y^2 = R^2$

Superficie de la guía coaxial de acoplo $\longrightarrow y^2 + z^2 \leq r^2$

Parametrización de la superficie cavidad reentrante \longrightarrow

$$\begin{aligned} x &= R \cos \theta \\ y &= R \sin \theta \end{aligned}$$

Combinando las dos condiciones obtenemos la superficie de acoplo \longrightarrow

$$R^2 \sin^2 \theta + z^2 \leq r^2$$

$$z^2 \leq r^2 - R^2 \sin^2 \theta \longrightarrow -\sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \theta} \leq z \leq \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \theta}$$

$$r^2 - R^2 \sin^2 \theta \geq 0 \longrightarrow r^2 \geq R^2 \sin^2 \theta \longrightarrow |\sin \theta| \leq \frac{r}{R}$$

$$\theta \in \left[-\arcsin\left(\frac{r}{R}\right), \arcsin\left(\frac{r}{R}\right) \right]$$

$$x(\theta, s) = R \cos \theta$$

$$y(\theta, s) = R \sin \theta$$

$$z(\theta, s) = s\sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \theta}$$

$$dS = R\sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \theta} d\theta ds$$

Geometría de la superficie de acoplo del puerto -x

Para obtener la parametrización de la geometría de acoplo al puerto -y simplemente debemos hacer el cambio de $x \rightarrow -x$

$$x(\theta, s) = -R \cos \theta$$

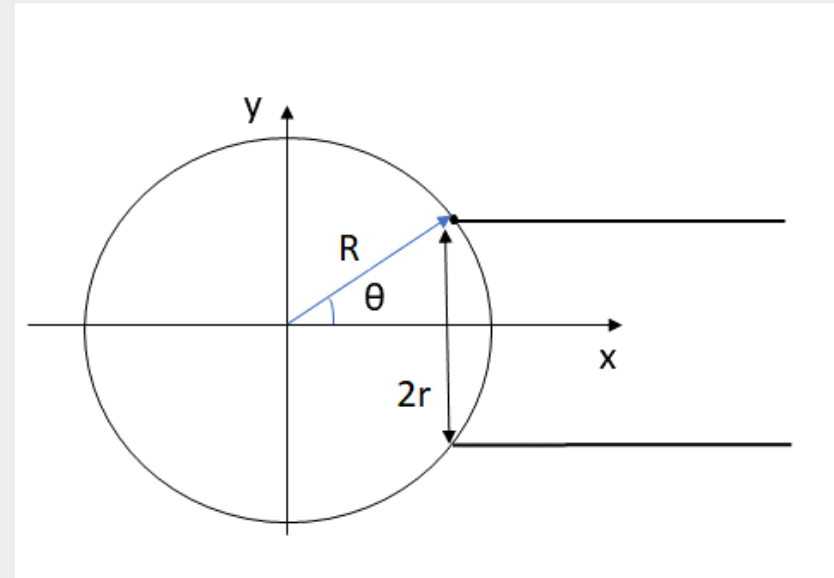
$$y(\theta, s) = R \sin \theta$$

$$z(\theta, s) = s\sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \theta}$$

$$\theta \in \left[-\arcsin\left(\frac{r}{R}\right), \arcsin\left(\frac{r}{R}\right) \right]$$

$$s \in [-1, 1]$$

$$dS = R\sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \theta} d\theta ds$$



Esquema del acoplo entre el BPM y el coaxial en el puerto +x (se muestra solo el conductor externo del coaxial)

Aplicación de BIR-ME para un BPM

Cálculo de J_μ

Campo magnético de la guía coaxial de acoplo en los puertos

- En la guía coaxial que se acopla en los puertos del BPM supondremos solo la existencia del modo fundamental TEM
- El campo magnético del modo TEM, apropiadamente normalizado para BIR-ME, viene dado por

$$\vec{h}_{TEM} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln\left(\frac{b}{a}\right)}} \frac{1}{r} \hat{\phi} \quad \hat{\phi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$$

b es el radio del conductor externo
 a es el radio del conductor interno
 r es la coordenada radial en cilíndricas
 φ es el ángulo azimutal en cilíndricas

- En BIR-ME existe la convención de que, cuando hagamos la integral del campo magnético en cada puerto, debemos suponer que la onda electromagnética se orienta hacia dentro de la cavidad
- Por tanto, hay que definir apropiadamente el vector azimutal en cada puerto, y saber relacionar las coordenadas locales (x', y', z') de dicho puerto, con las del sistema de coordenadas global usado para definir el BPM (x, y, z)
- A continuación obtendremos los campos magnéticos del modo TEM para cada uno de los puertos y las transformaciones de coordenadas entre el sistema global del BPM y los locales

Aplicación de BIR-ME para un BPM

Cálculo de J_μ

Puerto +y

Las transformaciones de coordenadas entre el sistema local (S') y el global (S) vienen dadas por

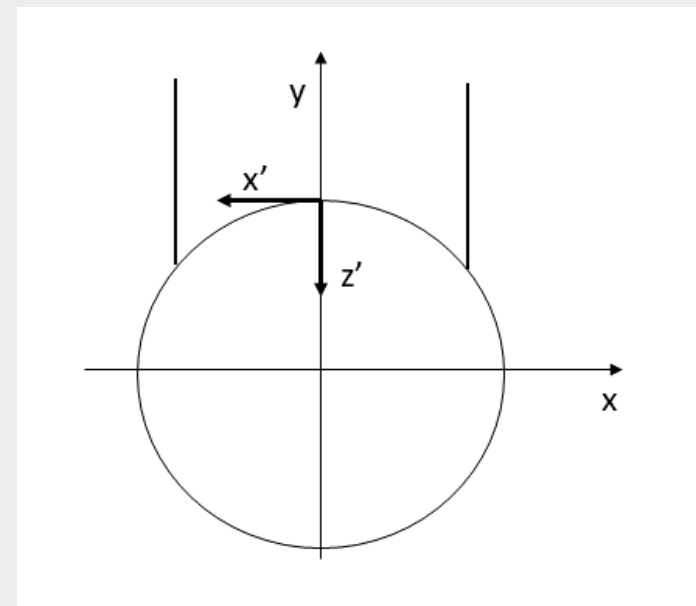
$$\left. \begin{aligned} x &= -x' \\ y &= -(z' - r_3) \\ z &= \frac{g}{2} + d_a - y' \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -(z - \frac{g}{2} - d_a) \\ z' &= r_3 - y \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= r \cos \varphi' \\ y' &= r \sin \varphi' \\ z' &= r_3 - y \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= -r \cos \varphi' \\ y &= -(z' - r_3) \\ z &= \frac{g}{2} + d_a - r \sin \varphi' \end{aligned}$$

$$r = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{x^2 + \left(z - \frac{g}{2} - d_a\right)^2} \quad \hat{\varphi}' = \tan^{-1} \left(\frac{y'}{x'} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-\left(z - \frac{g}{2} - d_a\right)}{-x} \right)$$

$$\hat{\varphi}' = -\sin \varphi' \hat{x}' + \cos \varphi' \hat{y}' = \sin \varphi' \hat{x} - \cos \varphi' \hat{z}$$

$$\vec{h}_{TEM} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln \left(\frac{b}{a}\right)}} \frac{1}{r} (\sin \varphi' \hat{x} - \cos \varphi' \hat{z})$$



Esquema del acoplo entre el BPM y el coaxial en el puerto +y. Definiciones de los sistemas de coordenadas local (S') y global (S)

r_3 es el radio externo de la cavidad reentrante del BPM

g es el gap del BPM

d_a es la posición axial del conductor interno del coaxial acoplador

Aplicación de BIR-ME para un BPM

Cálculo de J_μ

Puerto -y

Las transformaciones de coordenadas entre el sistema local (S') y el global (S) vienen dadas por

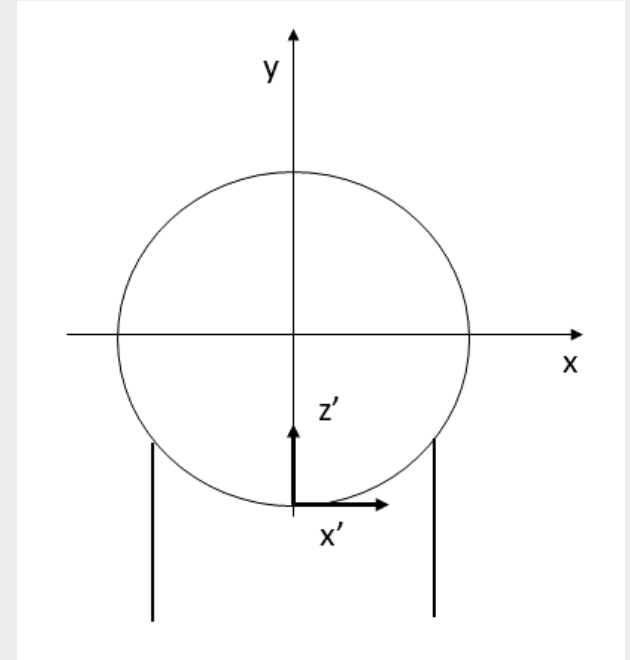
$$\left. \begin{aligned} x &= x' \\ y &= z' - r_3 \\ z &= \frac{g}{2} + d_a - y' \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -(z - \frac{g}{2} - d_a) \\ z' &= r_3 + y \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= r \cos \varphi' \\ y' &= r \sin \varphi' \\ z' &= y + r_3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= r \cos \varphi' \\ y &= z' + r_3 \\ z &= -r \sin \varphi' \end{aligned}$$

$$r = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{x^2 + \left(z - \frac{g}{2} - d_a\right)^2} \quad \hat{\varphi}' = \tan^{-1} \left(\frac{y'}{x'} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-\left(z - \frac{g}{2} - d_a\right)}{x} \right)$$

$$\hat{\varphi}' = -\sin \varphi' \hat{x}' + \cos \varphi' \hat{y}' = -\sin \varphi' \hat{x} - \cos \varphi' \hat{z}$$

$$\vec{h}_{TEM} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln \left(\frac{b}{a}\right)}} \frac{1}{r} (-\sin \varphi' \hat{x} - \cos \varphi' \hat{z})$$



Esquema del acoplo entre el BPM y el coaxial en el puerto -y. Definiciones de los sistemas de coordenadas local (S') y global (S)

r_3 es el radio externo de la cavidad reentrante del BPM
 g es el gap del BPM
 d_a es la posición axial del conductor interno del coaxial acoplador

Aplicación de BIR-ME para un BPM

Cálculo de J_μ

Puerto +x

Las transformaciones de coordenadas entre el sistema local (S') y el global (S) vienen dadas por

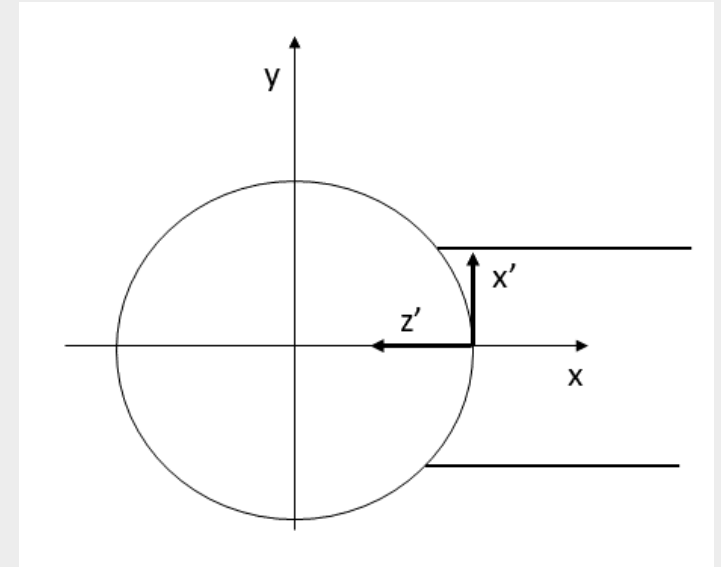
$$\left. \begin{aligned} x &= r_3 - z' \\ y &= x' \\ z &= \frac{g}{2} + d_a - y' \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -(z - \frac{g}{2} - d_a) \\ z' &= -(x - r_3) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= r \cos \varphi' \\ y' &= r \sin \varphi' \\ z' &= -(x - r_3) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= -z' \\ y &= r \cos \varphi' \\ z &= \frac{g}{2} + d_a - r \sin \varphi' \end{aligned}$$

$$r = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{y^2 + \left(z - \frac{g}{2} - d_a\right)^2} \quad \hat{\varphi}' = \tan^{-1} \left(\frac{y'}{x'} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-\left(z - \frac{g}{2} - d_a\right)}{y} \right)$$

$$\hat{\varphi}' = -\sin \varphi' \hat{x}' + \cos \varphi' \hat{y}' = -\sin \varphi' \hat{y} - \cos \varphi' \hat{z}$$

$$\vec{h}_{TEM} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln \left(\frac{b}{a}\right)}} \frac{1}{r} (-\sin \varphi' \hat{y} - \cos \varphi' \hat{z})$$



Esquema del acoplo entre el BPM y el coaxial en el puerto +x. Definiciones de los sistemas de coordenadas local (S') y global (S)

r_3 es el radio externo de la cavidad reentrante del BPM

g es el gap del BPM

d_a es la posición axial del conductor interno del coaxial acoplador

Aplicación de BIR-ME para un BPM

Cálculo de J_μ

Puerto -x

Las transformaciones de coordenadas entre el sistema local (S') y el global (S) vienen dadas por

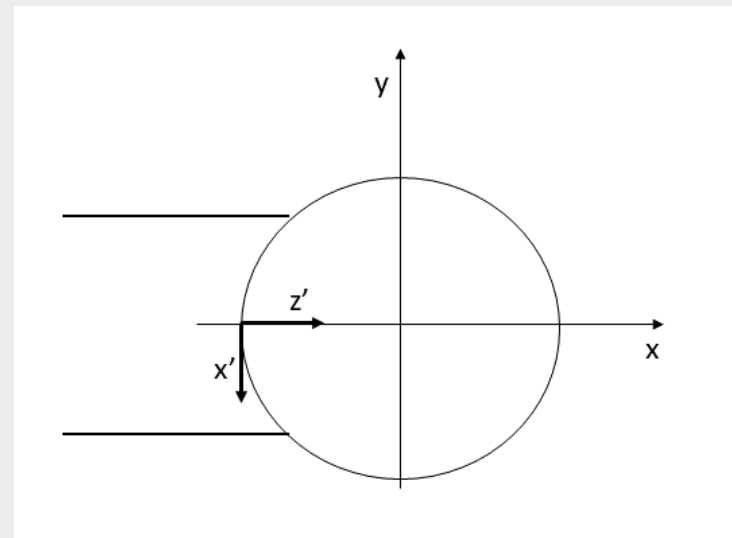
$$\left. \begin{aligned} x &= z' - r_3 \\ y &= -x' \\ z &= \frac{g}{2} + d_a - y' \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x' &= -y \\ y' &= -(z - \frac{g}{2} - d_a) \\ z' &= r_3 + x \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= r \cos \varphi' \\ y' &= r \sin \varphi' \\ z' &= r_3 + x \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= z' - r_3 \\ y &= -r \cos \varphi' \\ z &= \frac{g}{2} + d_a - r \sin \varphi' \end{aligned}$$

$$r = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{y^2 + \left(z - \frac{g}{2} - d_a\right)^2} \quad \hat{\varphi}' = \tan^{-1} \left(\frac{y'}{x'} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-\left(z - \frac{g}{2} - d_a\right)}{-y} \right)$$

$$\hat{\varphi}' = -\sin \varphi' \hat{x}' + \cos \varphi' \hat{y}' = \sin \varphi' \hat{y} - \cos \varphi' \hat{z}$$

$$\vec{h}_{TEM} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln \left(\frac{b}{a}\right)}} \frac{1}{r} (\sin \varphi' \hat{y} - \cos \varphi' \hat{z})$$



Esquema del acoplo entre el BPM y el coaxial en el puerto -x. Definiciones de los sistemas de coordenadas local (S') y global (S)

r_3 es el radio externo de la cavidad reentrante del BPM

g es el gap del BPM

d_a es la posición axial del conductor interno del coaxial acoplador

Aplicación de BIR-ME para un BPM

Calculo de la matriz de admitancias generalizada $Y_{ln}^{(\mu,\nu)}$

- La matriz de admitancias generalizada del BPM se obtiene con una simulación numérica en CST MS usando el módulo de *Frequency Solver*
- En nuestro caso (4 puertos, considerando solo el modo fundamental TEM), la matriz de admitancias es de dimensión 4 x 4
- La matriz de admitancias que proporciona CST MS está referida a la relación entre voltajes e intensidades en los puertos, mientras que en BIR-ME se requiere usar la matriz de admitancias que relaciones las amplitudes de los campos eléctrico y magnético
- La transformación entre ambas matrices de admitancias se logra, simplemente, multiplicando por un determinado factor
- Sin embargo, merece la pena asegurarse y entender bien tanto los resultados de salida de CST MS como los del factor corrector para aplicar BIR-ME posteriormente
- Con este propósito, simularemos en CST MS un caso sencillo de matriz de admitancias, que se pueda comparar con una fórmula teórica analítica, concretamente, consideraremos un tramo de guía coaxial, que se puede tratar fácilmente con la teoría de líneas de transmisión

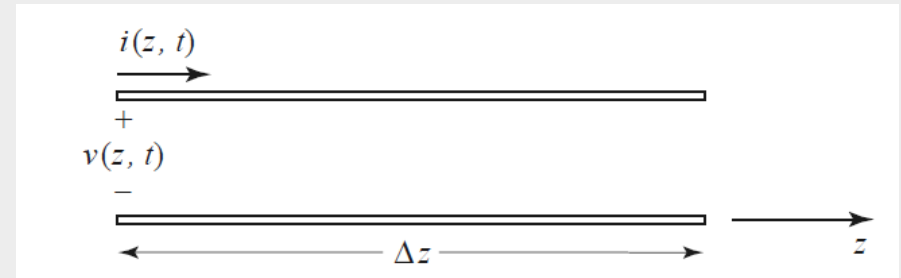
Aplicación de BIR-ME para un BPM

Calculo de la matriz de admitancias generalizada $Y_{ln}^{(\mu,\nu)}$

- Sea un tramo de guía coaxial de longitud l , por el que se propaga el modo fundamental TEM, el voltaje y la intensidad de corriente de la onda vienen dados por

$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z}$$

$$I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{V^-}{Z_0} e^{j\beta z}$$



Esquema de línea de transmisión

Calculamos el voltaje y la intensidad de corriente en el puerto 1 ($z=0$) y en el puerto 2 ($z=l$)

$$V_1 = V(0) = V^+ + V^-$$

$$V_2 = V(l) = V^+ e^{-j\beta l} + V^- e^{j\beta l}$$

$$I_1 = I(0) = \frac{V^+}{Z_0} - \frac{V^-}{Z_0}$$

$$I_2 = I(l) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-j\beta l} - \frac{V^-}{Z_0} e^{j\beta l}$$

V^+ es la amplitud del voltaje de la onda que se propaga en la dirección $+z$

V^- es la amplitud del voltaje de la onda que se propaga en la dirección $-z$

Z_0 es la impedancia característica de la línea de transmisión

β es el factor de propagación

$$\begin{array}{l}
 (1) \left\{ \begin{array}{l} V_1 = V^+ + V^- \\ Z_0 I_1 = V^+ - V^- \end{array} \right. \quad (1)+(2) \longrightarrow V^+ = \frac{V_1 + Z_0 I_1}{2} \quad (1)-(2) \longrightarrow V^- = \frac{V_1 - Z_0 I_1}{2} \\
 (2) \left\{ \begin{array}{l} V_2 = V^+ e^{-j\beta l} + V^- e^{j\beta l} \\ Z_0 I_2 = V^+ e^{-j\beta l} - V^- e^{j\beta l} \end{array} \right. \quad (3)+(4) \longrightarrow V^+ = \frac{(V_2 + Z_0 I_2)}{2} e^{j\beta l} \quad (3)-(4) \longrightarrow V^- = \frac{(V_2 - Z_0 I_2)}{2} e^{-j\beta l} \\
 (3) \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \\
 (4) \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.
 \end{array}$$

Aplicación de BIR-ME para un BPM

Calculo de la matriz de admitancias generalizada $Y_{ln}^{(\mu,\nu)}$

En (2) sustituyo los resultados de (3)+(4) y de (3)-(4)

$$(2) \quad Z_0 I_1 = V^+ - V^- \quad V^+ = \frac{(V_2 + Z_0 I_2)}{2} e^{j\beta l} \quad V^- = \frac{(V_2 - Z_0 I_2)}{2} e^{-j\beta l}$$

$$Z_0 I_1 = \frac{(V_2 + Z_0 I_2)}{2} e^{j\beta l} - \frac{(V_2 - Z_0 I_2)}{2} e^{-j\beta l} = V_2 \frac{(e^{j\beta l} - e^{-j\beta l})}{2} + Z_0 I_2 \frac{(e^{j\beta l} + e^{-j\beta l})}{2} = jV_2 \sin \beta l + Z_0 I_2 \cos \beta l$$

En (4) sustituyo los resultados de (1)+(2) y de (1)-(2)

$$(4) \quad Z_0 I_2 = V^+ e^{-j\beta l} - V^- e^{j\beta l} \quad V^+ = \frac{V_1 + Z_0 I_1}{2} \quad V^- = \frac{V_1 - Z_0 I_1}{2}$$

$$Z_0 I_2 = \frac{(V_1 + Z_0 I_1)}{2} e^{-j\beta l} - \frac{(V_1 - Z_0 I_1)}{2} e^{j\beta l} = -V_1 \frac{(-e^{-j\beta l} + e^{-j\beta l})}{2} + Z_0 I_1 \frac{(e^{-j\beta l} + e^{-j\beta l})}{2} = -jV_1 \sin \beta l + Z_0 I_1 \cos \beta l$$

Resumiendo

Sustituimos la segunda ecuación en la primera

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= j \frac{V_2}{Z_0} \sin \beta l + I_2 \cos \beta l \\ I_2 &= -j \frac{V_1}{Z_0} \sin \beta l + I_1 \cos \beta l \end{aligned} \right\} \begin{aligned} I_1 &= j \frac{V_2}{Z_0} \sin \beta l + \left(-j \frac{V_1}{Z_0} \sin \beta l + I_1 \cos \beta l \right) \cos \beta l \\ &= j \frac{V_2}{Z_0} \sin \beta l - j \frac{V_1}{Z_0} \sin \beta l \cos \beta l + I_1 \cos^2 \beta l \end{aligned}$$

$$I_1 = -j \frac{V_1 \cos \beta l}{Z_0 \sin \beta l} + j \frac{V_2}{Z_0} \frac{1}{\sin \beta l} = -\frac{j}{Z_0} (\cot \beta l V_1 - \csc \beta l V_2)$$

Aplicación de BIR-ME para un BPM

Calculo de la matriz de admitancias generalizada $Y_{ln}^{(\mu,\nu)}$

- Ahora sustituimos la primera ecuación en la segunda

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= j \frac{V_2}{Z_0} \sin \beta l + I_2 \cos \beta l \\ I_2 &= -j \frac{V_1}{Z_0} \sin \beta l + I_1 \cos \beta l \end{aligned} \right\} \begin{aligned} I_2 &= -j \frac{V_1}{Z_0} \sin \beta l + \left(j \frac{V_2}{Z_0} \sin \beta l + I_2 \cos \beta l \right) \cos \beta l \\ &= -j \frac{V_1}{Z_0} \sin \beta l + j \frac{V_2}{Z_0} \sin \beta l \cos \beta l + I_2 \cos^2 \beta l \end{aligned}$$

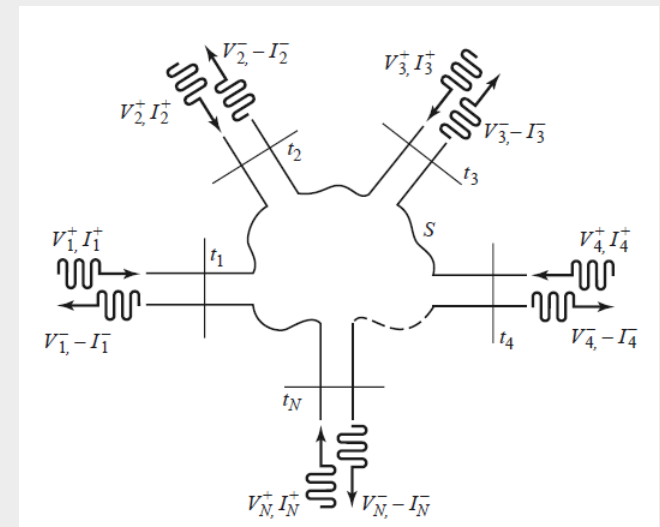
$$I_2 = -j \frac{V_1}{Z_0} \frac{1}{\sin \beta l} + j \frac{V_2 \cos \beta l}{Z_0 \sin \beta l} = -\frac{j}{Z_0} (\csc \beta l V_1 - \cot \beta l V_2)$$

- Recapitulando, obtenemos las siguientes ecuaciones que nos relacionan las corrientes en los puertos con los voltajes

$$I_1 = -\frac{j}{Z_0} (\cot \beta l V_1 - \csc \beta l V_2)$$

$$I_2 = -\frac{j}{Z_0} (\csc \beta l V_1 - \cot \beta l V_2)$$

- Ahora bien, las matrices de admitancias están referidas a redes de microondas, relacionando los voltajes e intensidades de cada puerto
- Además, existe una convención de signos, de manera que las corrientes se definen como positivas cuando entran en el componente y negativas cuando salen

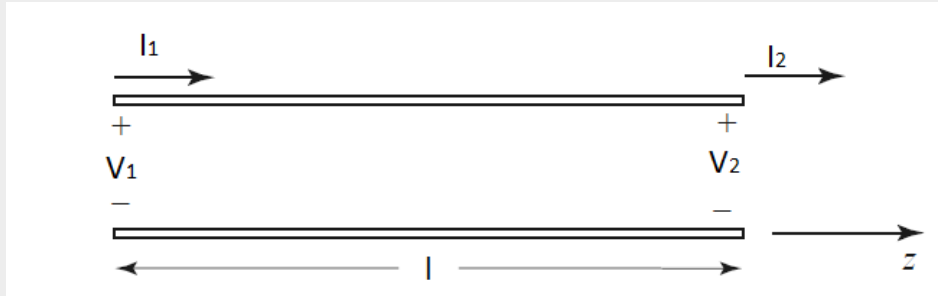


Esquema red de microondas con N-puertos

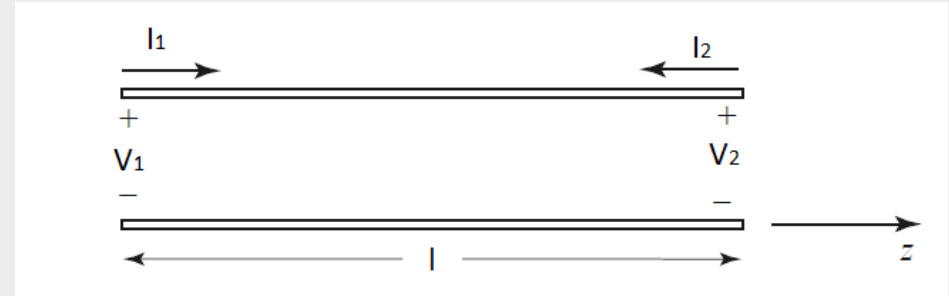
Aplicación de BIR-ME para un BPM

Calculo de la matriz de admitancias generalizada $Y_{ln}^{(\mu,\nu)}$

- Hay que tener en cuenta que el convenio de signos de las redes de microondas no coincide con la de las líneas de transmisión, que es el modelo que hemos usado para la deducción de las ecuaciones anteriores



Guía coaxial como línea de transmisión



Guía coaxial como red de microondas (2 puertos)

- En la teoría de líneas de transmisión, la corriente I_2 se define como positiva cuando la onda se propaga en dirección $+z$ (en el sistema de red microondas “sale” del sistema). Por tanto, debemos hacer el cambio I_2 por $-I_2$ en las ecuaciones anteriores, ser coherentes con la notación de redes de microondas

$$I_1 = -\frac{j}{Z_0} (\cot \beta l V_1 - \csc \beta l V_2)$$

$$I_2 = -\frac{j}{Z_0} (\csc \beta l V_1 - \cot \beta l V_2)$$

$\xrightarrow{I_2 \rightarrow -I_2}$

$$I_1 = -\frac{j}{Z_0} (\cot \beta l V_1 - \csc \beta l V_2)$$

$$I_2 = -\frac{j}{Z_0} (-\csc \beta l V_1 + \cot \beta l V_2)$$

- Finalmente, obtenemos la matriz de admitancias para la propagación en la guía coaxial de longitud l

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = -\frac{j}{Z_0} \begin{pmatrix} \cot \beta l & -\csc \beta l \\ -\csc \beta l & \cot \beta l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$$Y = -\frac{j}{Z_0} \begin{pmatrix} \cot \beta l & -\csc \beta l \\ -\csc \beta l & \cot \beta l \end{pmatrix}$$

Aplicación de BIR-ME para un BPM

Calculo de la matriz de admitancias generalizada $Y_{ln}^{(\mu,\nu)}$

- La matriz de admitancias anterior Y , relaciona las corrientes y los voltajes en los puertos de la red de microondas. Sin embargo, en BIR-ME, se trabaja con la matriz de admitancias modal Y_{EH} , que relaciona las amplitudes de los campos eléctrico y magnético
- La conversión entre las matrices Y e Y_{EH} se obtiene a través de un factor multiplicativo ψ , como se muestra a continuación

$$E(z) = E^+ e^{-j\beta z} + E^- e^{j\beta z}$$

$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z}$$

$$H(z) = \frac{E^+}{\eta} e^{-j\beta z} - \frac{E^-}{\eta} e^{j\beta z}$$

$$I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{V^-}{Z_0} e^{j\beta z}$$

E^+ es la amplitud del campo eléctrico de la onda que se propaga en la dirección $+z$
 E^- es la amplitud del campo eléctrico de la onda que se propaga en la dirección $-z$
 Z_0 es la impedancia característica de la línea de transmisión (guía coaxial)
 η es la impedancia modal
 a radio conductor interno del coaxial
 b radio conductor externo del coaxial
 μ_0 permeabilidad magnética del vacío
 ϵ_0 permitividad eléctrica del vacío

Existe una equivalencia entre las ecuaciones de los campos E y H , con las de V e I

$$E(z) \leftrightarrow V(z)$$

$$H(z) \leftrightarrow I(z)$$

$$\eta \leftrightarrow Z_0$$

$$Z_0 = \frac{V}{I} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$Y = -\frac{j}{Z_0} \begin{pmatrix} \cot \beta l & -\csc \beta l \\ -\csc \beta l & \cot \beta l \end{pmatrix}$$

$$Y_{EH} = -\frac{j}{\eta} \begin{pmatrix} \cot \beta l & -\csc \beta l \\ -\csc \beta l & \cot \beta l \end{pmatrix}$$

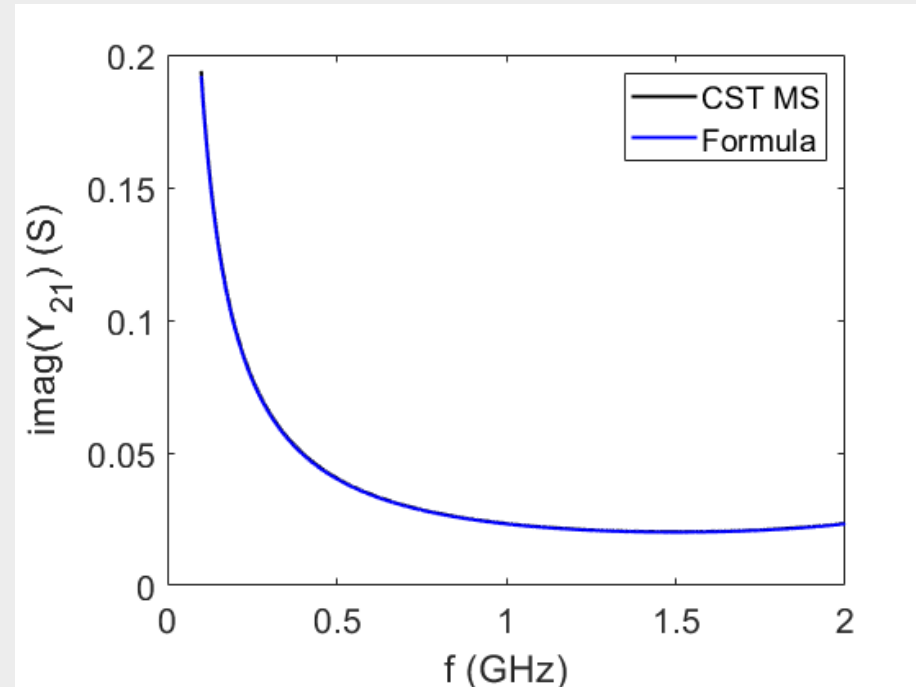
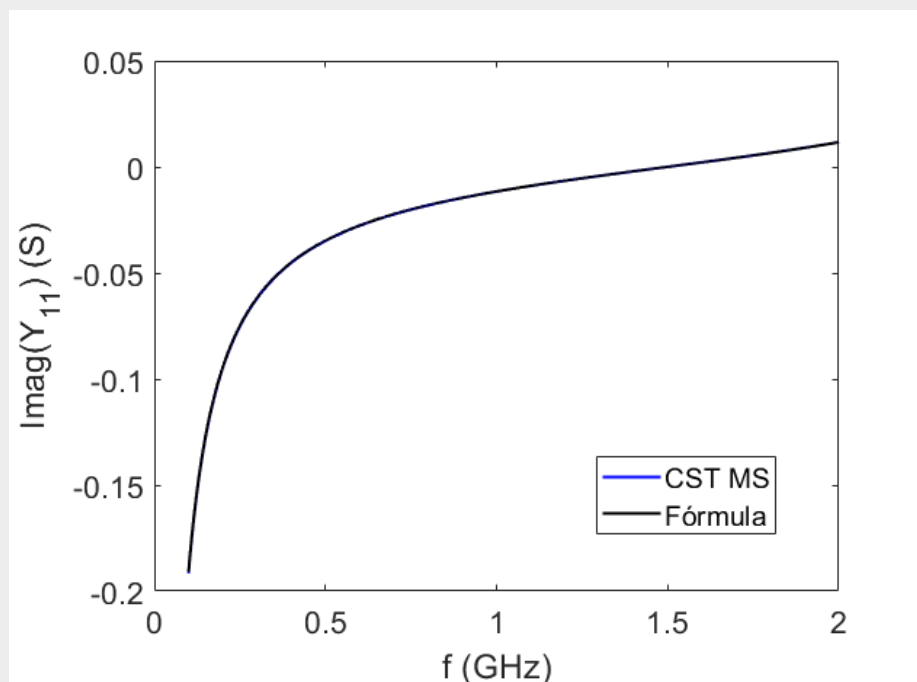
$$\eta = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$$Y_{EH} = \psi Y = -\frac{j}{\eta} \begin{pmatrix} \cot \beta l & -\csc \beta l \\ -\csc \beta l & \cot \beta l \end{pmatrix} = -\psi \frac{j}{Z_0} \begin{pmatrix} \cot \beta l & -\csc \beta l \\ -\csc \beta l & \cot \beta l \end{pmatrix} \longrightarrow \psi = \frac{Z_0}{\eta} \longrightarrow Y_{EH} = \frac{Z_0}{\eta} Y$$

Aplicación de BIR-ME para un BPM

Calculo de la matriz de admitancias generalizada $Y_{ln}^{(\mu,\nu)}$

- Con la información anterior, podemos representar gráficamente las componentes de la matriz de admitancias Y y comparar con la matriz de admitancias proporcionada por CST MS



$$Y = -\frac{j}{Z_0} \begin{pmatrix} \cot \beta l & -\csc \beta l \\ -\csc \beta l & \cot \beta l \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} l &= 50 \text{ mm} \\ a &= 0.51 \text{ mm} \\ b &= 1.17 \text{ mm} \end{aligned}$$

- Se obtiene una concordancia perfecta entre la fórmula teórica y los resultados de CST MS
- Por tanto, concluimos que somos capaces de interpretar correctamente los resultados proporcionados por CST MS y podemos pasar a obtener la matriz Y para el BPM y, posteriormente, la Y_{EH} para su aplicación al método BIR-ME

Aplicación de BIR-ME para un BPM

Conversión de voltaje modal a voltaje en puerto coaxial

- El voltaje proporcionado al resolver el modelo circuital en BIR-ME es un voltaje modal, referido a la amplitud de excitación del modo de la guía en el puerto de salida
- Cuando medimos en el laboratorio obtenemos el voltaje en la guía (en nuestro caso, un coaxial), que no coincide con el voltaje modal
- La relación entre ambos voltajes se puede obtener sencillamente como

Ecuación para obtener los voltajes modales en BIR-ME $\longrightarrow V_l^{(\mu)} = \left(Y_{w,l}^{(\mu)} + Y_{ln}^{(\mu,\nu)} \right)^{-1} \tilde{I}_l^{(\mu)}$

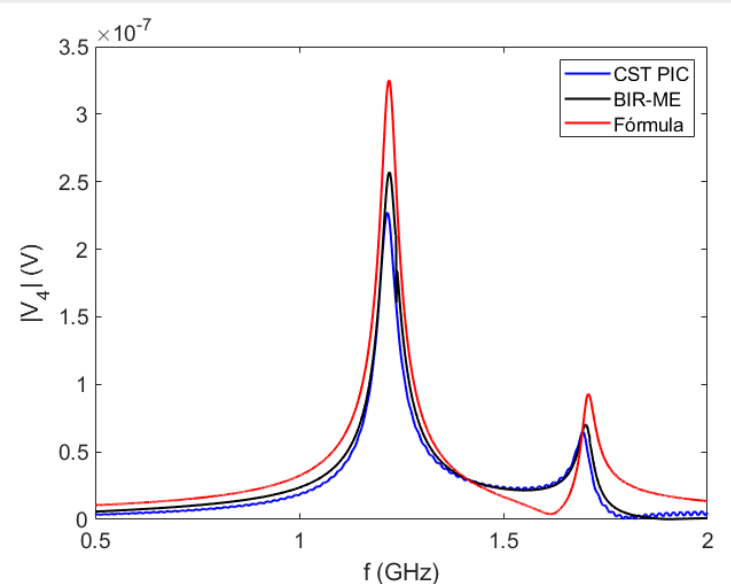
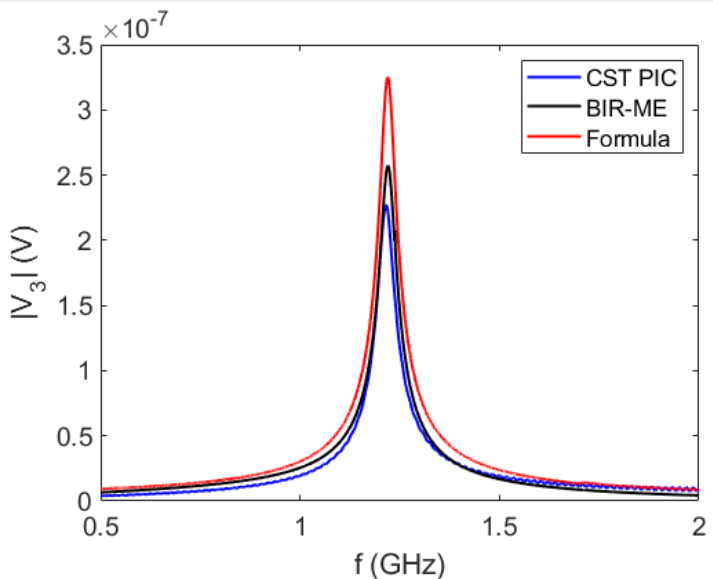
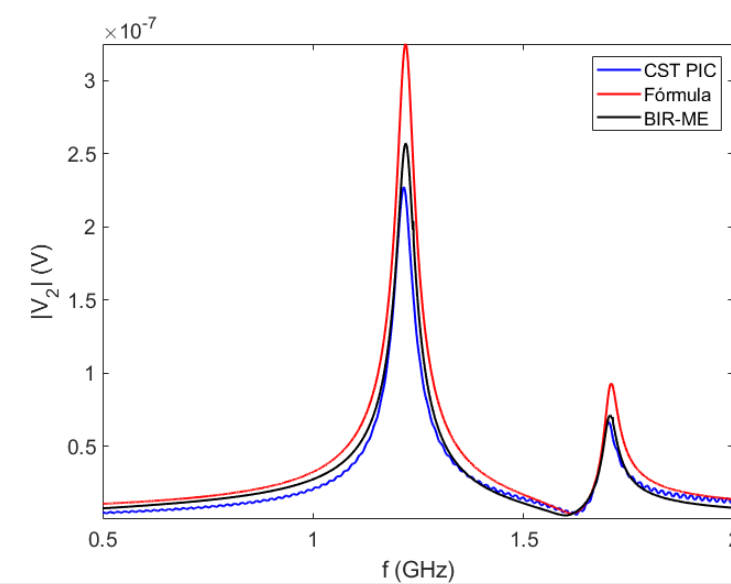
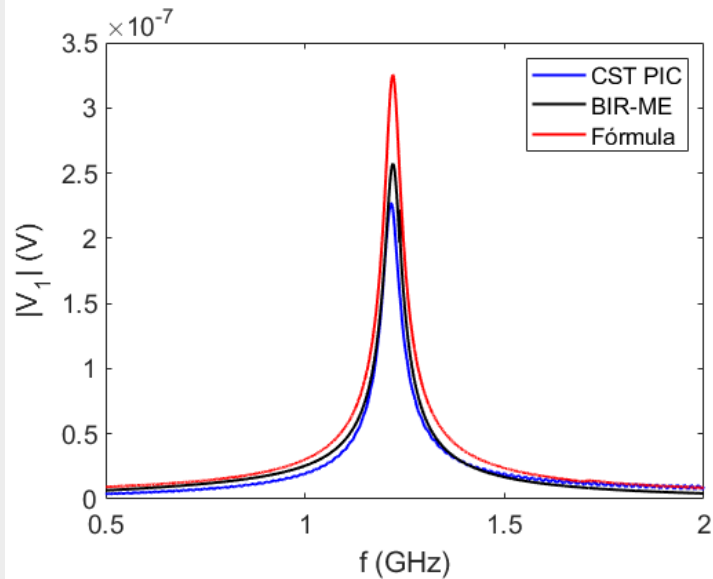
Modo TEM de la guía coaxial $\longrightarrow \vec{e}_{TEM} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln\left(\frac{b}{a}\right)}} \frac{1}{r} \hat{r} \quad d\vec{r} = \hat{r} dr$

$$V_{coax,p} = \int_a^b V_p \vec{e}_{TEM} \cdot d\vec{r} = \frac{V_p}{\sqrt{2\pi \ln\left(\frac{b}{a}\right)}} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{V_p}{\sqrt{2\pi \ln\left(\frac{b}{a}\right)}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = V_p \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi}}$$

b es el radio del conductor externo
 a es el radio del conductor interno
 r es la coordenada radial en cilíndricas
 \hat{r} es el vector unitario en la dirección radial
 $V_{coax,p}$ es el voltaje medido en el coaxial situado en el puerto p

Aplicación de BIR-ME para un BPM

- Con toda la información anterior, estamos en disposición de aplicar BIR-ME al BPM para obtener los voltajes de salida para cada uno de los puertos de salida del mismo
- A continuación se muestran los resultados de BIR-ME para los puertos 1 (+y), 2(+x), 3(-y), 4(-x). Se incluyen también los resultados numéricos de las simulaciones PIC de CST MS, además de la fórmula teórica



- Se observa que en todos las gráficas, existe una concordancia excelente entre las simulaciones numéricas de CST y los resultados de BIR-ME

- La expresión teórica, aunque presenta ligeras diferencias con BIR-ME y CST, también resulta ser bastante precisa para estimar el voltaje de salida por los puertos del BPM

- A la vista de los resultados, concluimos que BIR-ME es adecuado para estudiar las señales de salida de un BPM excitado por un haz de electrones

Índice

- **s**
- Descripción general del método BIR-ME
- Aplicación de BIR-ME para un haloscopio
- Fórmula teórica para la potencia de salida de un BPM
- Aplicación de BIR-ME para un BPM
- **Conclusiones**

Conclusiones
